Continuité

EL KYAL MOHAMED

Continuité en un point :

f est **continue** en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Continuité à droite - Continuité à gauche :

- f est **continue à droite** en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$
- f est **continue à gauche** en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$
- f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche en x_0

Continuité sur un intervalle :

- f est continue sur un intervalle ouvert $]a,b[$ si f est continue en chaque élément de $]a,b[$
- f est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et f est continue à droite en a et à gauche en b

Opérations sur les fonctions continues:

Soit f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle I et k un réel

- Les fonctions $f+g$, $f \times g$, kf et f^n avec $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur I
- Les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I si g ne s'annule pas sur I

Conséquences :

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition
- La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$
- Les fonctions : $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Composé de deux fonctions continues:

Si f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur l'intervalle $f(I)$, alors la fonction gof est continue sur I

L'image d'un intervalle par une fonction continue:

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Cas particulier :

Soit f est continue et strictement monotone sur un intervalle I

Le tableau suivant illustre les différents cas possibles de l'intervalle $f\left(I\right)$

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$\left[a,b\right]$	$\left[f\left(a\right);f\left(b\right)\right]$	$\left[f\left(b\right);f\left(a\right)\right]$
$\left[a,b\right[$	$\left[f\left(a\right);\lim\limits_{x\to b^-}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f\left(x\right);f\left(a\right)\right]$
$\left]a,b\right]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right);f\left(b\right)\right]$	$\left[f\left(b\right);\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right)\right[$
$\left]a,b\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to b^-}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right)\right[$
$\left[a,+\infty\right[$	$\left[f\left(a\right);\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right);f\left(a\right)\right]$
$\left]a,+\infty\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right)\right[$
$\left]-\infty,a\right]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right);f\left(a\right)\right]$	$\left[f\left(a\right);\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)\right[$
$\left]-\infty,a\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to a^-}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)\right[$

- ***Théorème des valeurs intermédiaires :***

Si f est continue sur un intervalle $\left[a,b\right]$, alors pour tout réel β compris entre $f\left(a\right)$ et $f\left(b\right)$ il existe au moins un réel α de l'intervalle $\left[a,b\right]$ tel que $f\left(\alpha\right)=\beta$

Si f est continue sur un intervalle $\left[a,b\right]$ telle que $f\left(a\right)\times f\left(b\right)<0$ alors l'équation $f\left(x\right)=0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left]a,b\right[$

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $\left[a,b\right]$ telle que $f\left(a\right)\times f\left(b\right)<0$ alors l'équation $f\left(x\right)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]a,b\right[$

- ***Méthode de dichotomie :***

Soit f est fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $\left[a,b\right]$ telle que $f\left(a\right)\times f\left(b\right)<0$
l équation $f\left(x\right)=0$ admet une solution unique α dans $\left]a,b\right[$

Si $f\left(a\right)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$	Si $f\left(b\right)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$
Alors : $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$ l'amplitude de cet encadrement est : $\frac{b-a}{2}$. On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$	Alors: $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$ l'amplitude de cet encadrement est : $\frac{b-a}{2}$. On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$

On arrête le processus dès que l'amplitude de l'encadrement de α est inférieur à la précision souhaitée